

Función de Distribución de la probabilidad en KPZ

De Baik-Rains hacia la uniformidad

Alejandro Alés

25 de abril de 2025

Instituto de Física de Mar del Plata,
Universidad Nacional de Mar del Plata

Introducción: Ruido descorrelacionado

- Superficies rugosas

- Exponentes críticos

- Datos desde la PDF

Situación con correlación temporal del ruido

- Exponentes críticos

- PDF con ruido con correlación

- Buscando el punto de transición.

Conclusiones

Introducción: Ruido descorrelacionado

Superficies rugosas estimuladas por ruido

Ecuación de crecimiento

Es una ecuación en derivadas parciales, con derivada a primer orden en el tiempo y puede depender de la altura y sus derivadas.

$$\partial_t h(x, t) = \mathcal{F}(h, \nabla h, \nabla^2 h, \dots; t) + \eta(x, t)$$

donde $\eta(x, t)$ es un término estocástico.

¹Kardar, M., Parisi, G., & Zhang, Y. C. (1986). Physical Review Letters, 56(9), 889.

Superficies rugosas estimuladas por ruido

Ecuación de crecimiento

Es una ecuación en derivadas parciales, con derivada a primer orden en el tiempo y puede depender de la altura y sus derivadas.

$$\partial_t h(x, t) = \mathcal{F}(h, \nabla h, \nabla^2 h, \dots; t) + \eta(x, t)$$

donde $\eta(x, t)$ es un término estocástico.

- Los crecimientos de interfaces rugosas modelan sistemas como fluidos en medios aleatorios o propagación de frentes en medios desordenados.

¹Kardar, M., Parisi, G., & Zhang, Y. C. (1986). Physical Review Letters, 56(9), 889.

Superficies rugosas estimuladas por ruido

Ecuación de crecimiento

Es una ecuación en derivadas parciales, con derivada a primer orden en el tiempo y puede depender de la altura y sus derivadas.

$$\partial_t h(x, t) = \mathcal{F}(h, \nabla h, \nabla^2 h, \dots; t) + \eta(x, t)$$

donde $\eta(x, t)$ es un término estocástico.

- Los crecimientos de interfaces rugosas modelan sistemas como fluidos en medios aleatorios o propagación de frentes en medios desordenados.
- Modela distintos sistemas (discretos o continuos) que caen dentro de la clase de universalidad.

¹Kardar, M., Parisi, G., & Zhang, Y. C. (1986). Physical Review Letters, 56(9), 889.

Superficies rugosas estimuladas por ruido

Ecuación de crecimiento

Es una ecuación en derivadas parciales, con derivada a primer orden en el tiempo y puede depender de la altura y sus derivadas.

$$\partial_t h(x, t) = \mathcal{F}(h, \nabla h, \nabla^2 h, \dots; t) + \eta(x, t)$$

donde $\eta(x, t)$ es un término estocástico.

- Los crecimientos de interfaces rugosas modelan sistemas como fluidos en medios aleatorios o propagación de frentes en medios desordenados.
- Modela distintos sistemas (discretos o continuos) que caen dentro de la clase de universalidad.

En particular, nos centraremos en la ecuación de KPZ

$$\partial_t h(x, t) = \nu \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2 + \eta(x, t)$$

¹Kardar, M., Parisi, G., & Zhang, Y. C. (1986). Physical Review Letters, 56(9), 889.

Superficies rugosas estimuladas por ruido

Ecuación de crecimiento

Es una ecuación en derivadas parciales, con derivada a primer orden en el tiempo y puede depender de la altura y sus derivadas.

$$\partial_t h(x, t) = \mathcal{F}(h, \nabla h, \nabla^2 h, \dots; t) + \eta(x, t)$$

donde $\eta(x, t)$ es un término estocástico.

- Los crecimientos de interfaces rugosas modelan sistemas como fluidos en medios aleatorios o propagación de frentes en medios desordenados.
- Modela distintos sistemas (discretos o continuos) que caen dentro de la clase de universalidad.

En particular, nos centraremos en la ecuación de KPZ

$$\partial_t h(x, t) = \nu \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2 + \eta(x, t)$$

¹Kardar, M., Parisi, G., & Zhang, Y. C. (1986). Physical Review Letters, 56(9), 889.

Generalmente, las superficies rugosas tienen una pinta de este tipo

Generalmente, las superficies rugosas tienen una pinta de este tipo

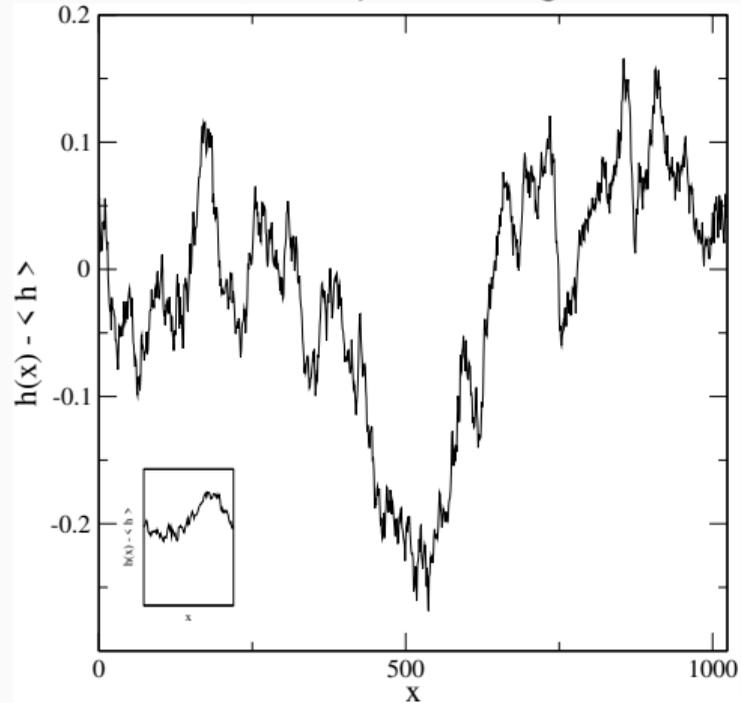
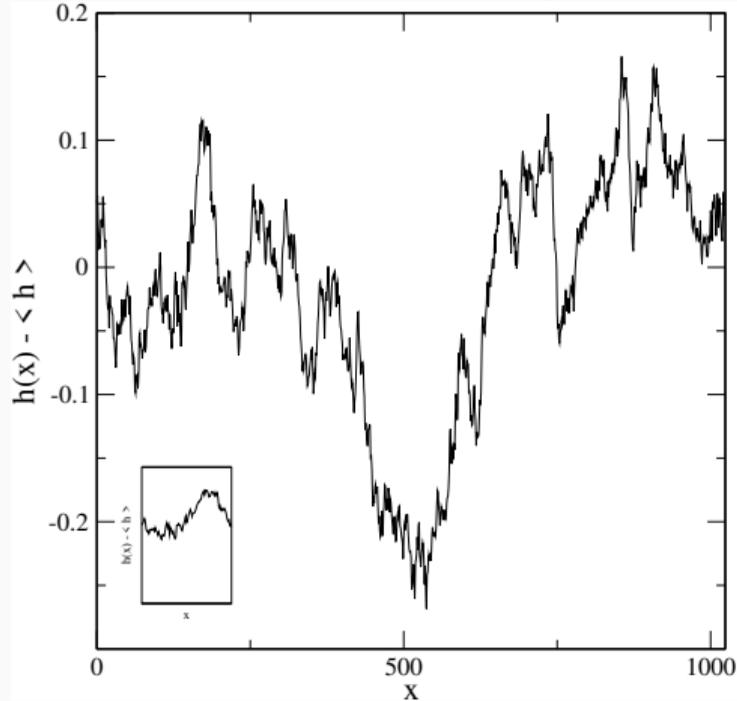


Figura 1: Snapshot de una superficie.

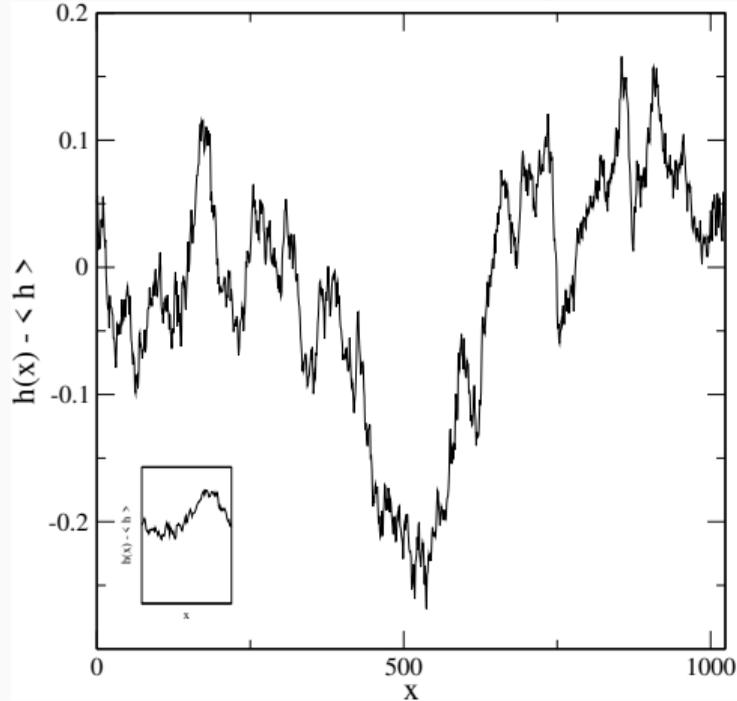
Generalmente, las superficies rugosas tienen una pinta de este tipo



- Con propiedades fractales o autoafines de escala. Como se puede ver en el inset que es una parte interior de la superficie.

Figura 1: Snapshot de una superficie.

Generalmente, las superficies rugosas tienen una pinta de este tipo



- Con propiedades fractales o autoafines de escala. Como se puede ver en el inset que es una parte interior de la superficie.
- Eso implica que hay leyes de potencia con exponentes críticos involucrados.

Figura 1: Snapshot de una superficie.

Generalmente, las superficies rugosas tienen una pinta de este tipo

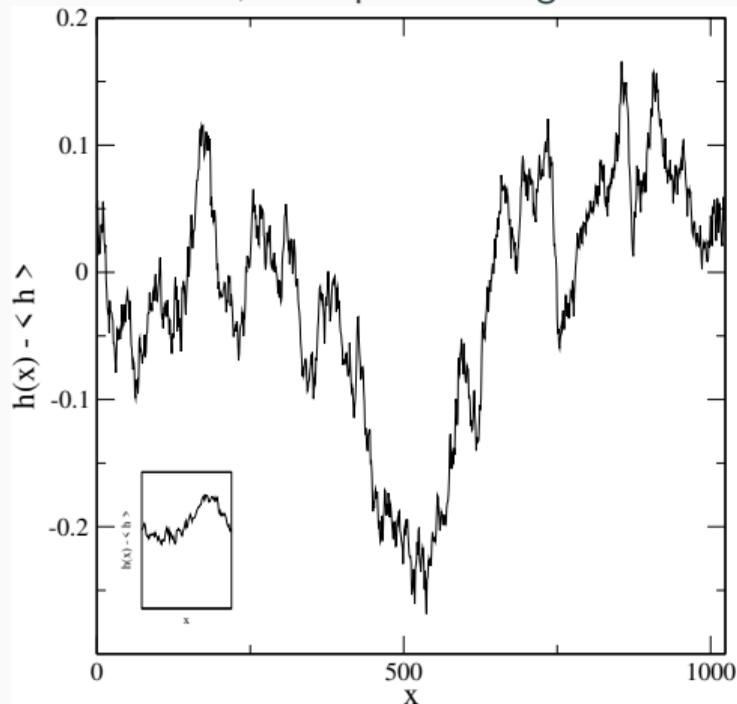


Figura 1: Snapshot de una superficie.

- Con propiedades fractales o autoafines de escala. Como se puede ver en el inset que es una parte interior de la superficie.
- Eso implica que hay leyes de potencia con exponentes críticos involucrados.
- Primero veremos ruido delta-correlacionado

$$\langle \eta(x, t) \eta(x', t') \rangle = \delta(x - x') \delta(t - t')$$

Consideraciones principales

Durante el crecimiento, tiene diferentes regímenes asociados a exponentes críticos, por ejemplo, la rugosidad $\omega^2(L, t) = \overline{\langle h^2(x, t) \rangle} - \langle h(x, t) \rangle^2$.

Consideraciones principales

Durante el crecimiento, tiene diferentes regímenes asociados a exponentes críticos, por ejemplo, la rugosidad $\omega^2(L, t) = \overline{\langle h^2(x, t) \rangle} - \langle h(x, t) \rangle^2$.

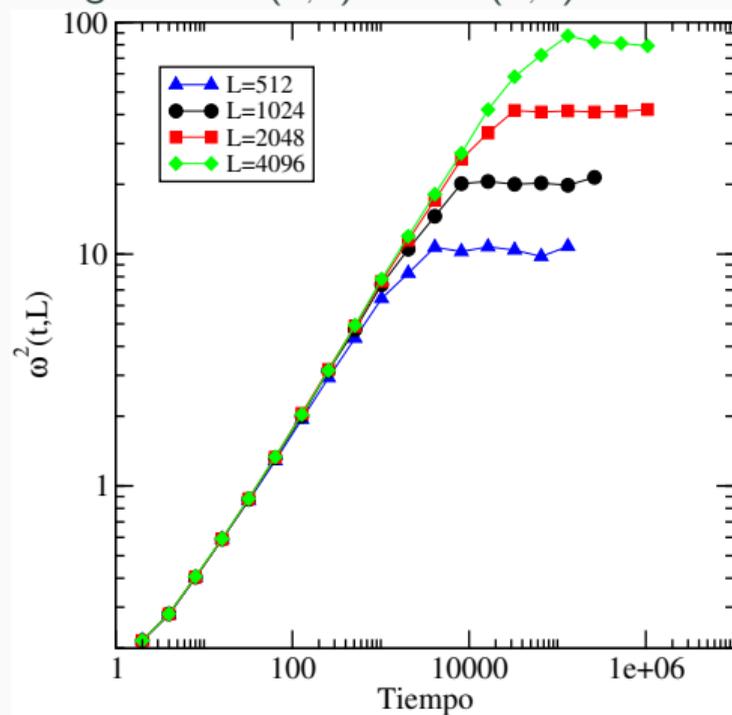


Figura 2: Rugosidad en función del tiempo.

Consideraciones principales

Durante el crecimiento, tiene diferentes regímenes asociados a exponentes críticos, por ejemplo, la rugosidad $\omega^2(L, t) = \overline{\langle h^2(x, t) \rangle} - \langle h(x, t) \rangle^2$.

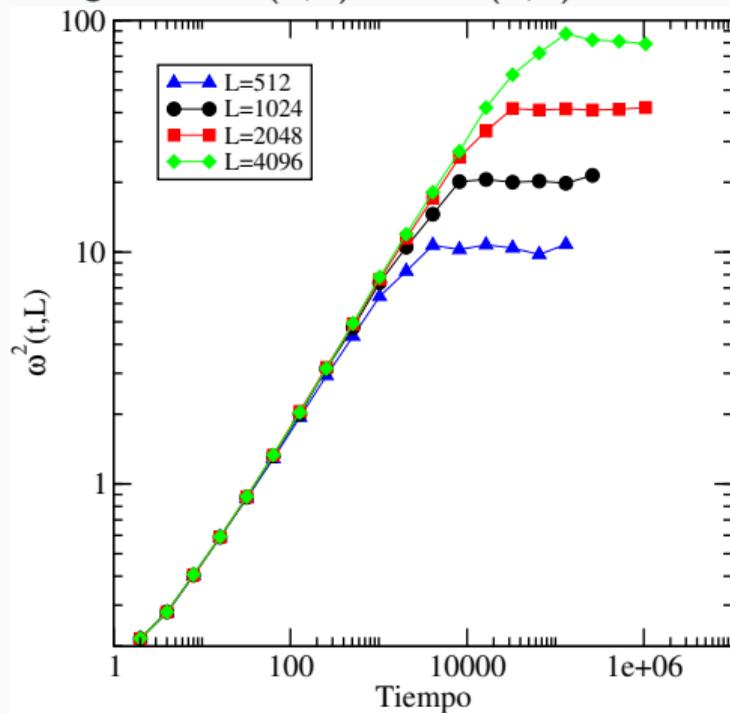


Figura 2: Rugosidad en función del tiempo.

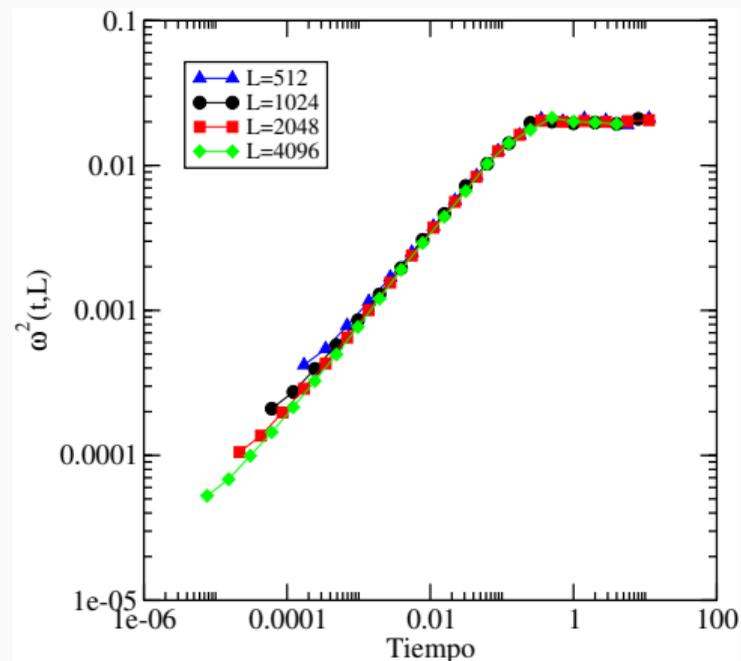


Figura 3: Colapso de la rugosidad

Consideraciones principales

Durante el crecimiento, tiene diferentes regímenes asociados a exponentes críticos, por ejemplo, la rugosidad $\omega^2(L, t) = \overline{\langle h^2(x, t) \rangle} - \langle h(x, t) \rangle^2$.

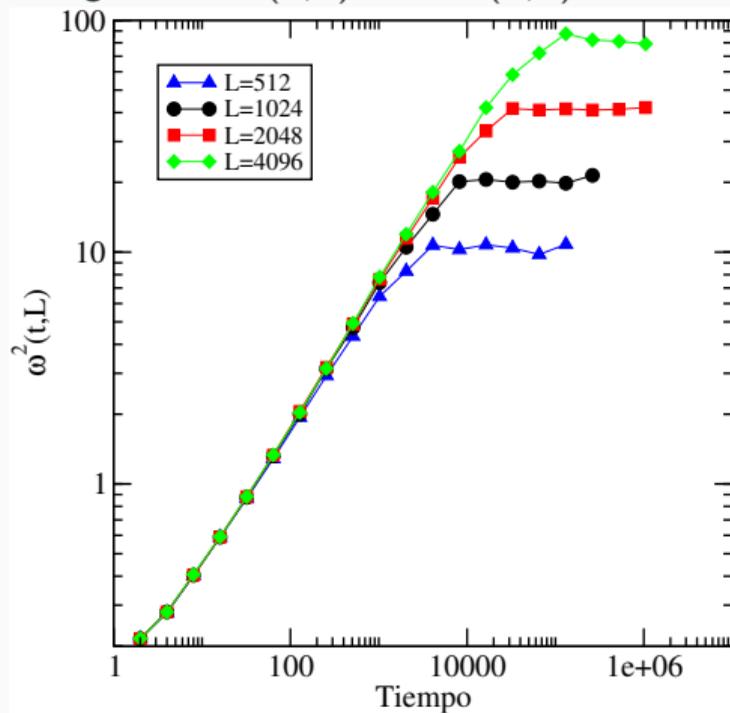


Figura 2: Rugosidad en función del tiempo.

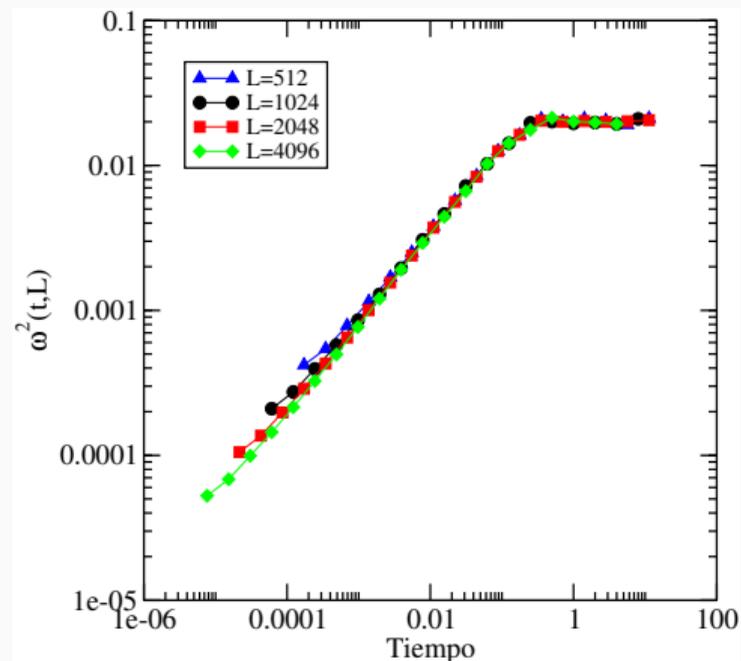


Figura 3: Colapso de la rugosidad

Otra alternativa para la determinación de los exponentes críticos viene desde el análisis de la densidad espectral

$$S(k, t) = \overline{\langle \hat{h}(k, t) \hat{h}(-k, t) \rangle}$$

donde

Otra alternativa para la determinación de los exponentes críticos viene desde el análisis de la densidad espectral

$$S(k, t) = \overline{\langle \hat{h}(k, t) \hat{h}(-k, t) \rangle}$$

donde

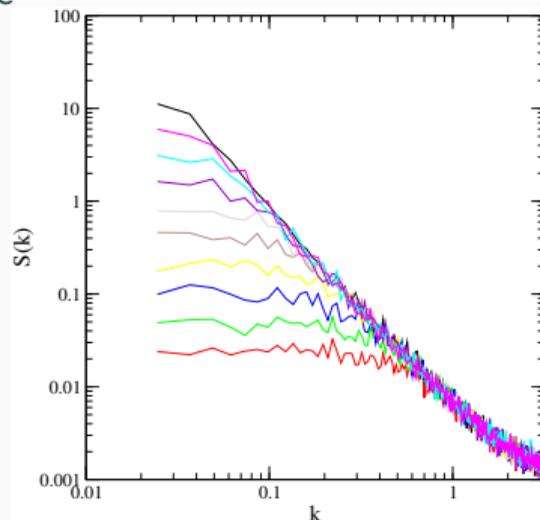


Figura 4: Espectro para distintos tiempos.

Otra alternativa para la determinación de los exponentes críticos viene desde el análisis de la densidad espectral

$$S(k, t) = \overline{\langle \hat{h}(k, t) \hat{h}(-k, t) \rangle}$$

donde

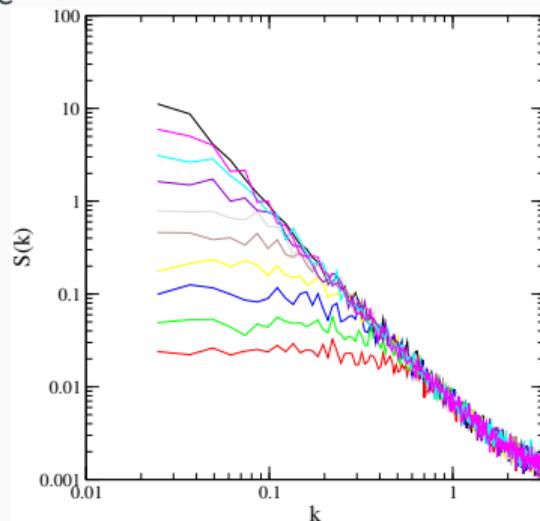


Figura 4: Espectro para distintos tiempos.

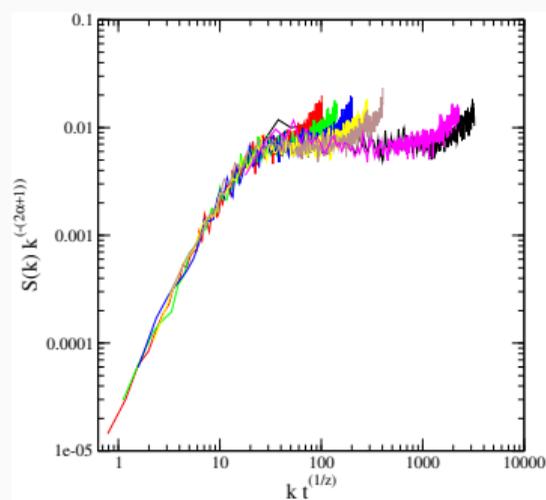


Figura 5: Colapso de los espectros.

Un nuevo enfoque, viendo a la superficie rugosa como ruido **correlacionado**, se ha manifestado en los últimos 20 años. Es decir $h(x, t) = \langle h(x, t) \rangle + \chi^{NN}(x, t)$ ²

²Takeuchi, K. A. (2018). Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 504, 77-105.

Consideraciones principales

Un nuevo enfoque, viendo a la superficie rugosa como ruido **correlacionado**, se ha manifestado en los últimos 20 años. Es decir $h(x, t) = \langle h(x, t) \rangle + \chi^{NN}(x, t)$ ²

Particularmente, para KPZ, se ha observado antes de la saturación tenemos

$$h(x, t) = v_{\infty} t + \frac{\chi^I(x, t)}{t^{\beta}}$$

donde $\chi^I(x, t)$ depende de la condición inicial

²Takeuchi, K. A. (2018). Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 504, 77-105.

Consideraciones principales

Un nuevo enfoque, viendo a la superficie rugosa como ruido **correlacionado**, se ha manifestado en los últimos 20 años. Es decir $h(x, t) = \langle h(x, t) \rangle + \chi^{NN}(x, t)$ ²

Particularmente, para KPZ, se ha observado antes de la saturación tenemos

$$h(x, t) = v_{\infty} t + \frac{\chi^I(x, t)}{t^{\beta}}$$

donde $\chi^I(x, t)$ depende de la condición inicial

Condiciones Iniciales:

- **Cuña** → GUE (Tracy-Widom).
- **Plana** → GOE.

²Takeuchi, K. A. (2018). Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 504, 77-105.

Consideraciones principales

Un nuevo enfoque, viendo a la superficie rugosa como ruido **correlacionado**, se ha manifestado en los últimos 20 años. Es decir $h(x, t) = \langle h(x, t) \rangle + \chi^{NN}(x, t)$ ²

Particularmente, para KPZ, se ha observado antes de la saturación tenemos

$$h(x, t) = v_{\infty} t + \frac{\chi^I(x, t)}{t^{\beta}}$$

donde $\chi^I(x, t)$ depende de la condición inicial

Condiciones Iniciales:

- **Cuña** → GUE (Tracy-Widom).
- **Plana** → GOE.

Para el caso de saturación, va hacia una distribución de Baik-Rains.

²Takeuchi, K. A. (2018). Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 504, 77-105.

Evolución temporal desde condición inicial plana (verde) hacia saturación (roja)

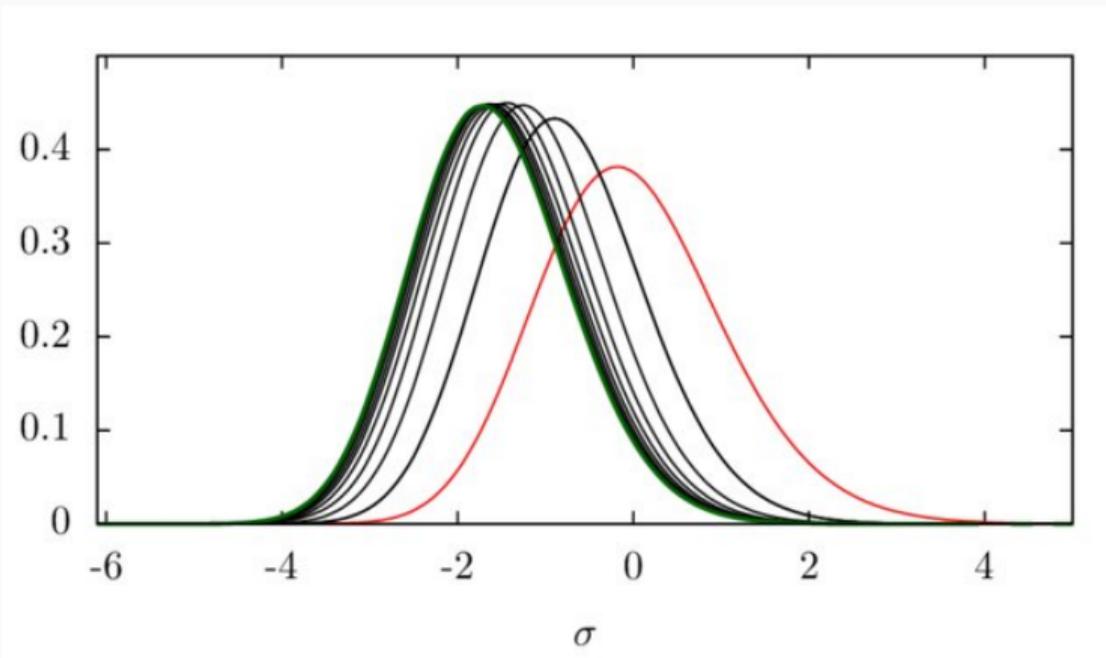


Figura 6: PDF para distintos tiempos.³

³Tail of the two-time height distribution for KPZ growth in one dimension

Transición temporal GOE \rightarrow Baik-Rains

Mediante la caracterización de momentos, se pueden observar las transiciones de las PDF de las superficies.

Transición temporal GOE → Baik-Rains

Mediante la caracterización de momentos, se pueden observar las transiciones de las PDF de las superficies.

Particularmente, basta conocer como se comportan la skewness

$$S = \mathbb{E} \left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)^3 \right] = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

Transición temporal GOE → Baik-Rains

Mediante la caracterización de momentos, se pueden observar las transiciones de las PDF de las superficies.

Particularmente, basta conocer como se comportan la skewness

$$S = \mathbb{E} \left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)^3 \right] = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

y la kurtosis

$$\kappa = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \mathbb{E} \left[\left(\frac{(X - \mu)}{\sigma} \right)^4 \right].$$

con una definición alternativa, kurtosis de exceso

$$\kappa_{ex} = \kappa - 3$$

Y además, ¿Qué sucede con la derivada de KPZ?

Como se ha mostrado tanto teórica como numéricamente, la derivada de KPZ ($u = \nabla h$) (ecuación de Burgers con ruido conservado)

$$\delta_t u = \nu \nabla^2 u + \lambda(u \cdot \nabla u) + \nabla \eta(x, t)$$

Y además, ¿Qué sucede con la derivada de KPZ?

Como se ha mostrado tanto teórica como numéricamente, la derivada de KPZ ($u = \nabla h$) (ecuación de Burgers con ruido conservado)

$$\delta_t u = \nu \nabla^2 u + \lambda(u \cdot \nabla u) + \nabla \eta(x, t)$$

tiene una PDF siempre gaussiana.

Situación con correlación temporal del ruido

Cambiando el enfoque, ¿Qué sucede cuando se le cambian algunas propiedades al ruido?

Efectos del ruido con correlación sobre una superficie

Cambiando el enfoque, ¿Qué sucede cuando se le cambian algunas propiedades al ruido?

Pasamos de

$$\langle \eta(x, t) \eta(x', t') \rangle = 2D^0 \delta(x - x') \delta(t - t') \rightarrow \langle \eta(x, t) \eta(x', t') \rangle = 2D^0 \delta(x - x') |t - t'|^{-1+2\theta}$$

Efectos del ruido con correlación sobre una superficie

Cambiando el enfoque, ¿Qué sucede cuando se le cambian algunas propiedades al ruido?

Pasamos de

$$\langle \eta(x, t) \eta(x', t') \rangle = 2D^0 \delta(x - x') \delta(t - t') \rightarrow \langle \eta(x, t) \eta(x', t') \rangle = 2D^0 \delta(x - x') |t - t'|^{-1+2\theta}$$

donde $\theta \in (0, \frac{1}{2})$ es el índice de correlación temporal del ruido y genera un ruido con memoria a **largo alcance**.

Predicciones analíticas

⁴Hanfei & B. Ma, Phys. Rev. E 47, 3738 (1993).

⁵Katzav, E., & Schwartz, M. (2004) . Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics, 70(1), 011601.

⁶Medina, E., Hwa, T., Kardar, M., & Zhang, Y. C. (1989). Physical Review A, 39(6), 3053.

Predicciones teóricas del efecto de la correlación

Predicciones analíticas

- Cálculo tipo Flory: mantiene la invarianza galileana por construcción. No hay puntos críticos.⁴

⁴Hanfei & B. Ma, Phys. Rev. E 47, 3738 (1993).

⁵Katzav, E., & Schwartz, M. (2004) . Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics, 70(1), 011601.

⁶Medina, E., Hwa, T., Kardar, M., & Zhang, Y. C. (1989). Physical Review A, 39(6), 3053.

Predicciones teóricas del efecto de la correlación

Predicciones analíticas

- Cálculo tipo Flory: mantiene la invarianza galileana por construcción. No hay puntos críticos.⁴
- Cálculo autoconsistente: Mantiene la invarianza galileana como resultado. Sin puntos críticos.⁵

⁴Hanfei & B. Ma, Phys. Rev. E 47, 3738 (1993).

⁵Katzav, E., & Schwartz, M. (2004) . Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics, 70(1), 011601.

⁶Medina, E., Hwa, T., Kardar, M., & Zhang, Y. C. (1989). Physical Review A, 39(6), 3053.

Predicciones teóricas del efecto de la correlación

Predicciones analíticas

- Cálculo tipo Flory: mantiene la invarianza galileana por construcción. No hay puntos críticos.⁴
- Cálculo autoconsistente: Mantiene la invarianza galileana como resultado. Sin puntos críticos.⁵
- Grupo de Renormalización Perturbativo: Ruptura de la invarianza galileana. Con más de un punto crítico. Bifurcación en $\theta = 1/6$ y puntos de divergencia en la serie $n/(2n + 2) = 1/4, 2/6, 3/8, 4/10, 5/12, \dots$ ⁶

⁴Hanfei & B. Ma, Phys. Rev. E 47, 3738 (1993).

⁵Katzav, E., & Schwartz, M. (2004) . Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics, 70(1), 011601.

⁶Medina, E., Hwa, T., Kardar, M., & Zhang, Y. C. (1989). Physical Review A, 39(6), 3053.

Predicciones teóricas del efecto de la correlación

Predicciones analíticas

- Cálculo tipo Flory: mantiene la invarianza galileana por construcción. No hay puntos críticos. ⁴
- Cálculo autoconsistente: Mantiene la invarianza galileana como resultado. Sin puntos críticos. ⁵
- Grupo de Renormalización Perturbativo: Ruptura de la invarianza galileana. Con más de un punto crítico. Bifurcación en $\theta = 1/6$ y puntos de divergencia en la serie $n/(2n + 2) = 1/4, 2/6, 3/8, 4/10, 5/12, \dots$ ⁶

Hay otros cálculos hechos en Grupo de renormalización funcional pero no son sustancialmente resultados diferentes.

⁴Hanfei & B. Ma, Phys. Rev. E 47, 3738 (1993).

⁵Katzav, E., & Schwartz, M. (2004) . Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics, 70(1), 011601.

⁶Medina, E., Hwa, T., Kardar, M., & Zhang, Y. C. (1989). Physical Review A, 39(6), 3053.

Los primeros efectos se pueden observar mediante snapshots

Los primeros efectos se pueden observar mediante snapshots

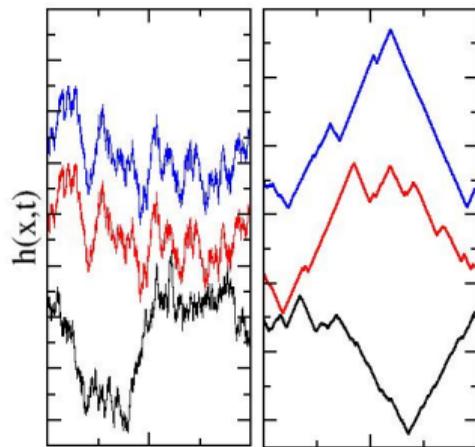


Figura 7: Snapshot superficie $\theta = 0,15$ (izq.) $\theta = 0,40$ (der.)

Los primeros efectos se pueden observar mediante snapshots

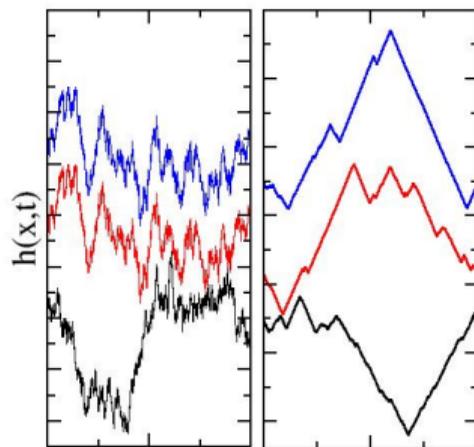


Figura 7: Snapshot superficie $\theta = 0,15$ (izq.) $\theta = 0,40$ (der.)

Aparecen estructuras macroscópicas para determinado valor de θ . Llamadas **facetas**.

Densidad espectral con correlación

Los efectos del ruido con correlación alta se observan así en la densidad espectral

Densidad espectral con correlación

Los efectos del ruido con correlación alta se observan así en la densidad espectral

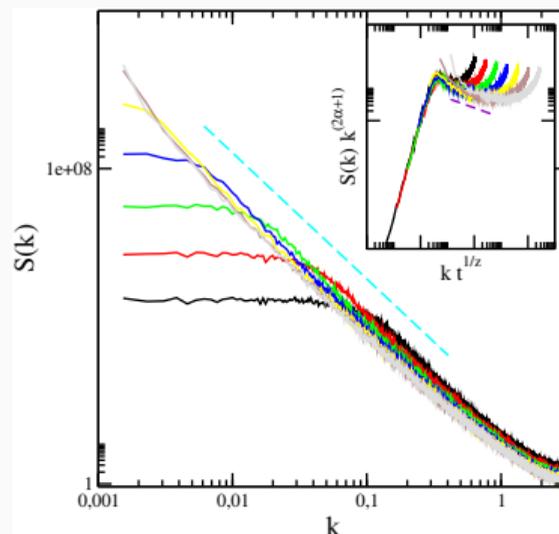


Figura 8: Densidad espectral $\theta = 0,45$ (der.). En el inset, el colapso de los espectros.

Un nuevo exponente crítico se observa a partir de $\theta_c = 1/4$.

Densidad espectral con correlación

Los efectos del ruido con correlación alta se observan así en la densidad espectral

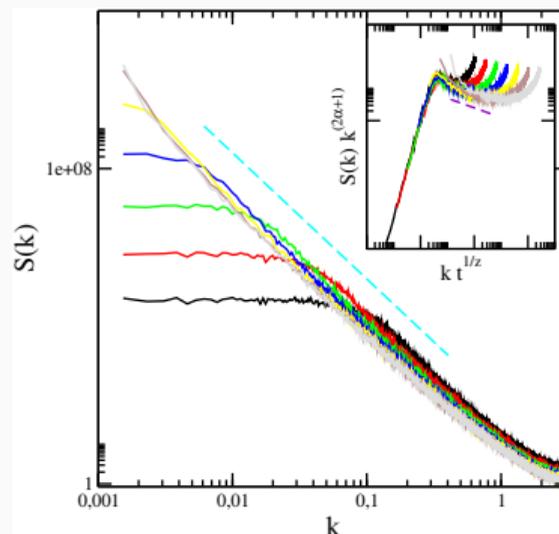


Figura 8: Densidad espectral $\theta = 0,45$ (der.). En el inset, el colapso de los espectros.

Un nuevo exponente crítico se observa a partir de $\theta_c = 1/4$. $\alpha_s \neq \alpha$

Exponentes críticos en función de la correlación

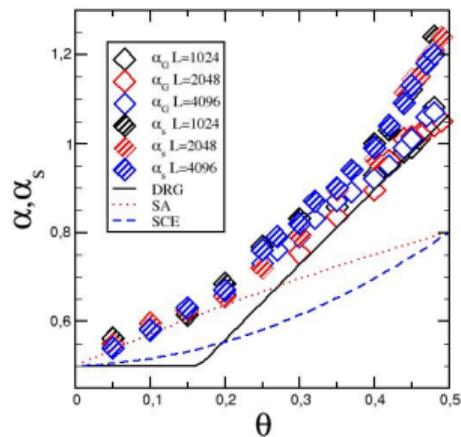


Figura 9: Exponentes α y α_s en función del correlador.

Exponentes críticos en función de la correlación

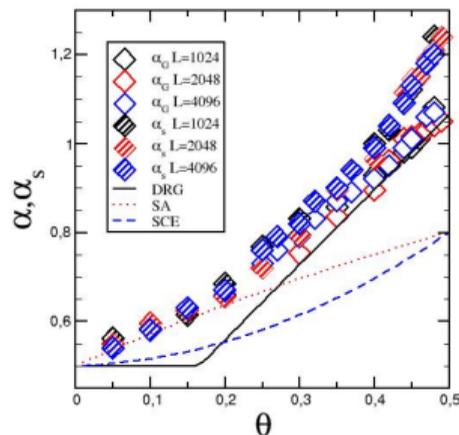


Figura 9: Exponentes α y α_s en función del correlador.

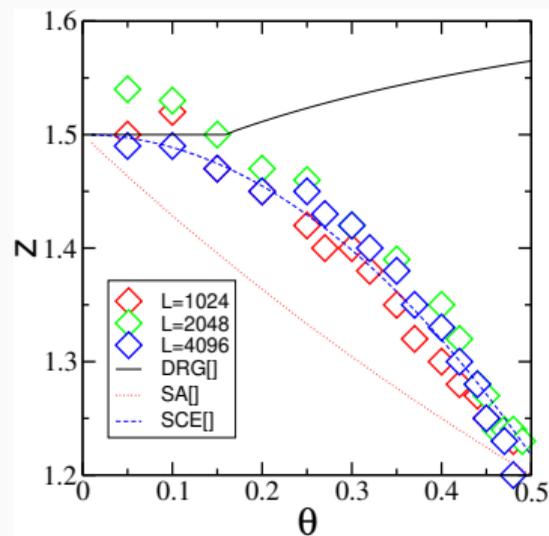


Figura 10: Exponente dinámico en función del correlador

Tenemos scaling anómalo inducido por la correlación del ruido!

Exponentes críticos en función de la correlación

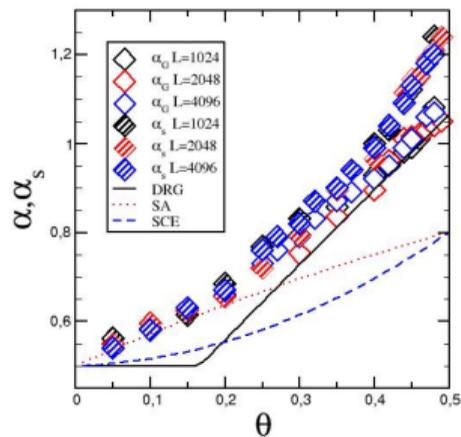


Figura 9: Exponentes α y α_s en función del correlador.

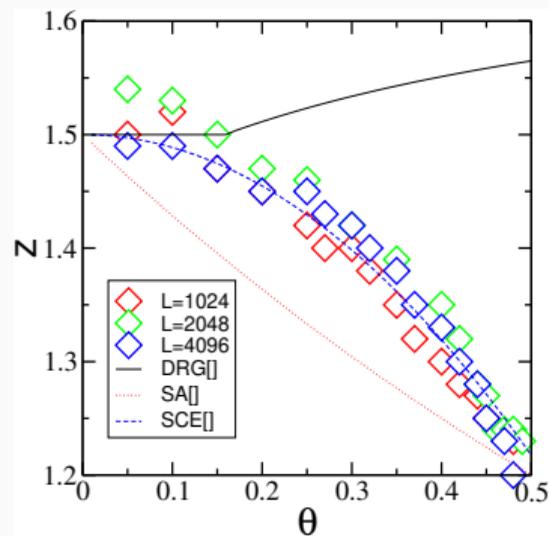


Figura 10: Exponente dinámico en función del correlador

Tenemos scaling anómalo inducido por la correlación del ruido! Donde $\alpha \neq \alpha_s$ es $\theta_c \approx 1/4$

Efecto sobre la PDF de la correlación del ruido

Tanto la skewness como la kurtosis se ven afectadas

Tanto la skewness como la kurtosis se ven afectadas

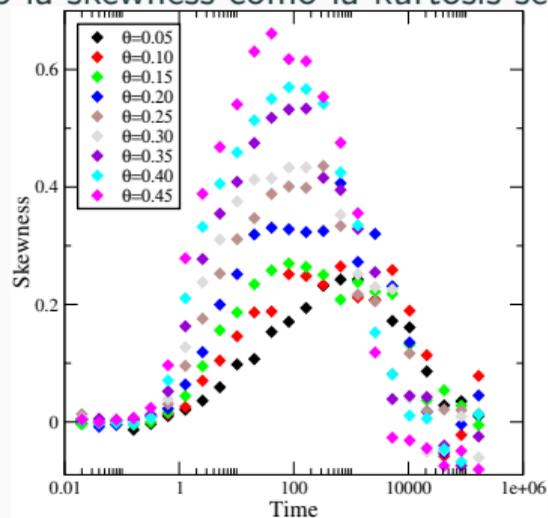


Figura 11: Skewness en función del correlador.

Efecto sobre la PDF de la correlación del ruido

Tanto la skewness como la kurtosis se ven afectadas

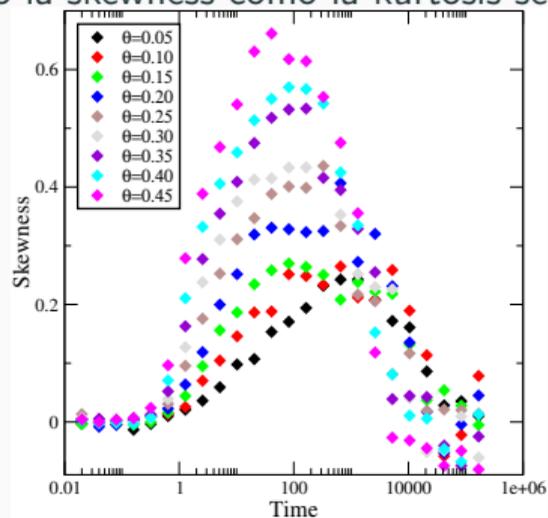


Figura 11: Skewness en función del correlador.

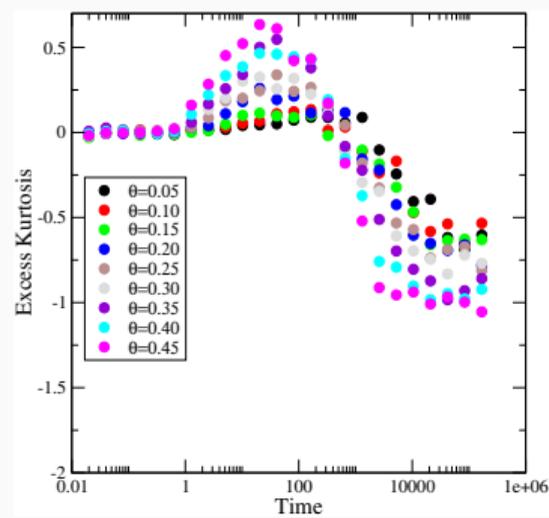


Figura 12: Kurtosis en función del correlador

Efecto sobre la PDF de la correlación del ruido

Tanto la skewness como la kurtosis se ven afectadas

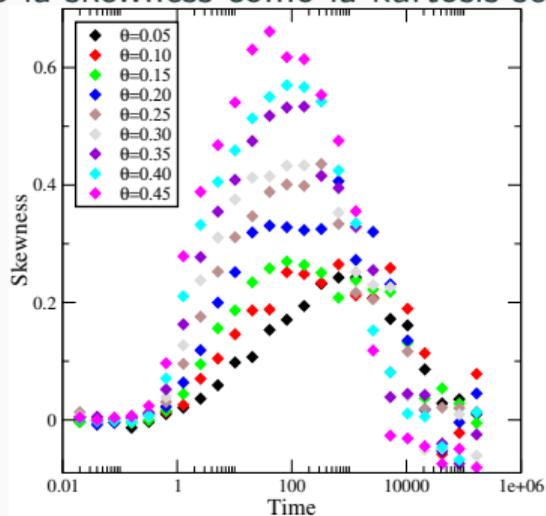


Figura 11: Skewness en función del correlador.

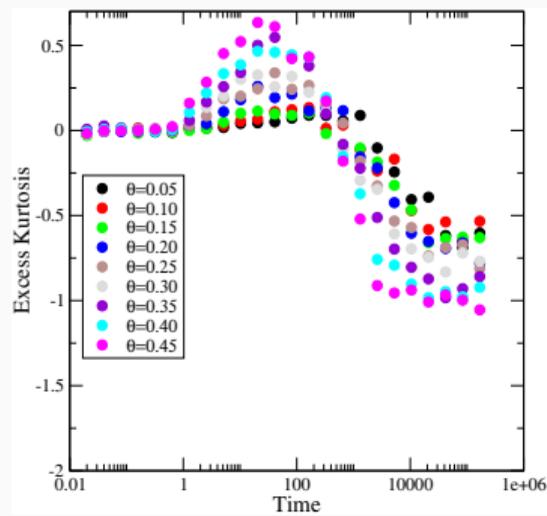


Figura 12: Kurtosis en función del correlador

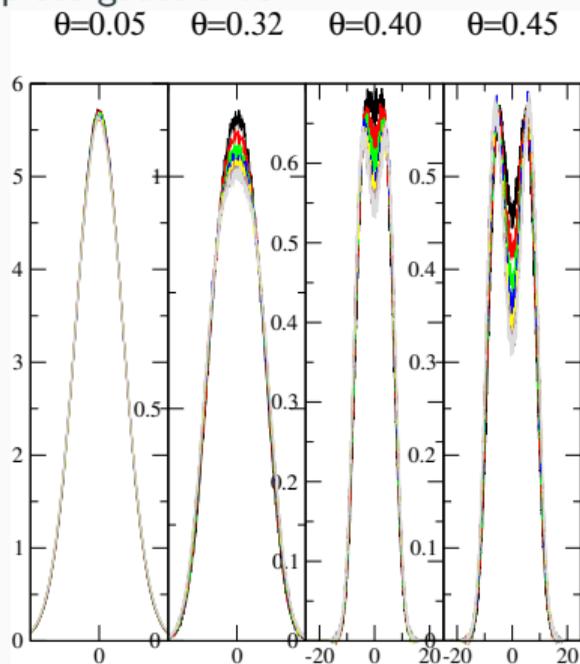
Hay una transición de regímenes suave!

Efecto sobre la derivada de KPZ

En la derivada de KPZ, no se observa un cambio de distribución *per se*. Sino la aparición de dos picos gaussianos

Efecto sobre la derivada de KPZ

En la derivada de KPZ, no se observa un cambio de distribución *per se*. Sino la aparición de dos picos gaussianos

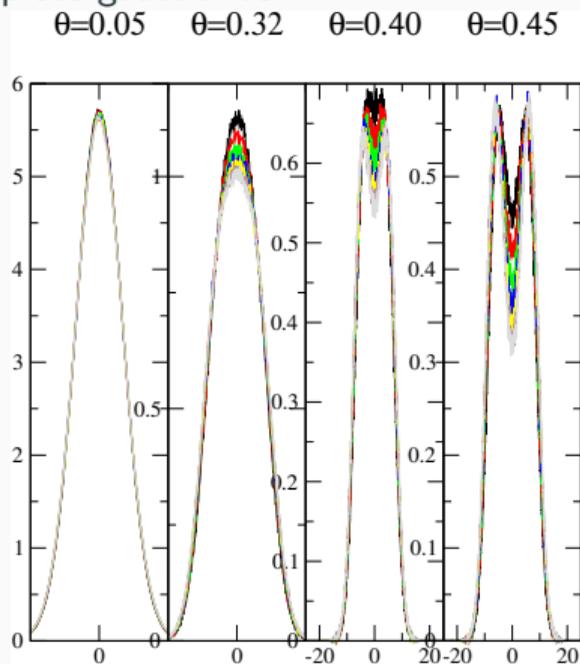


Distintos colores implican distintos tiempos.

Figura 13: PDF para Burgers distintas correlaciones.

Efecto sobre la derivada de KPZ

En la derivada de KPZ, no se observa un cambio de distribución *per se*. Sino la aparición de dos picos gaussianos

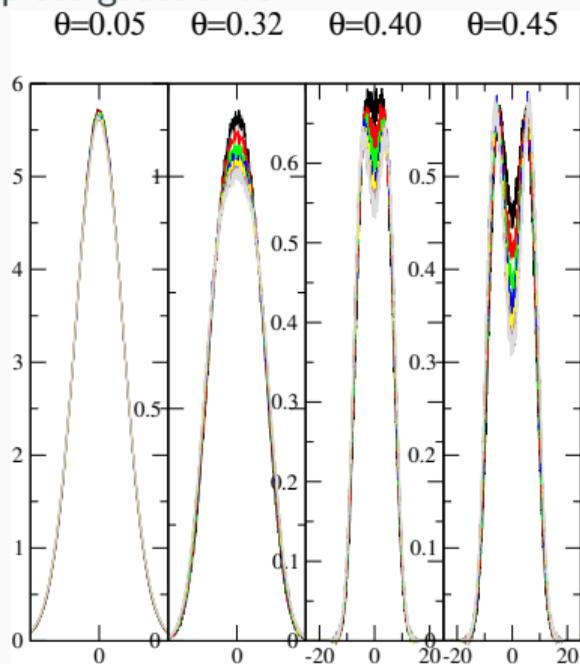


Distintos colores implican distintos tiempos.
Esto se debe a la formación de facetas.

Figura 13: PDF para Burgers distintas correlaciones.

Efecto sobre la derivada de KPZ

En la derivada de KPZ, no se observa un cambio de distribución *per se*. Sino la aparición de dos picos gaussianos



Distintos colores implican distintos tiempos.
Esto se debe a la formación de facetas.
¿Dónde se sucede esta separación de picos?

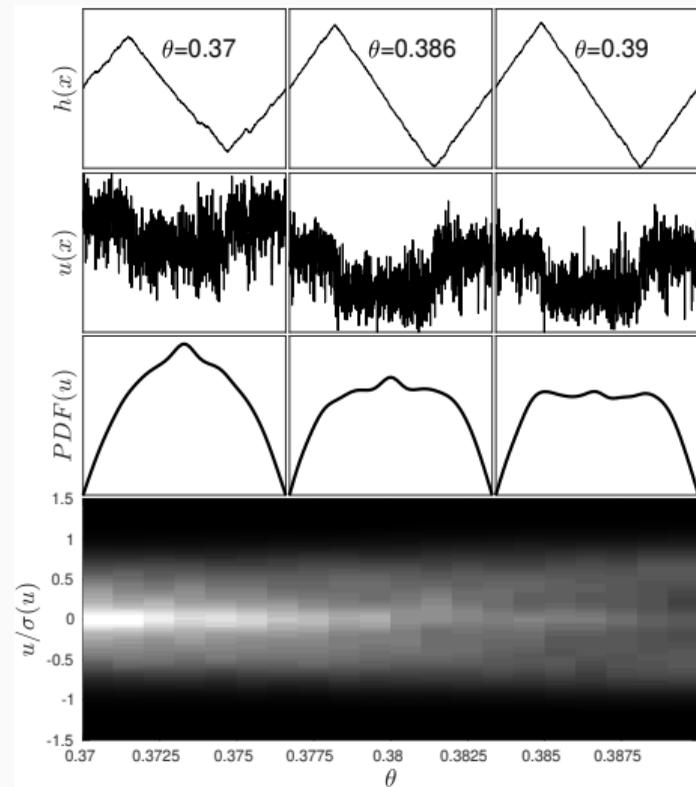
Figura 13: PDF para Burgers distintas correlaciones.

Doble campana de Gauss

Un análisis más detallado nos muestra

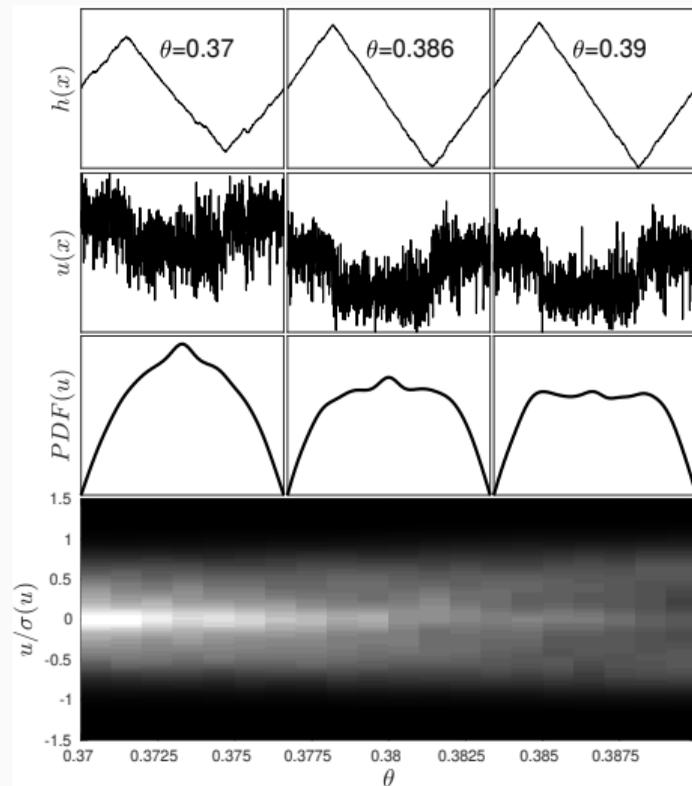
Doble campana de Gauss

Un análisis más detallado nos muestra



Doble campana de Gauss

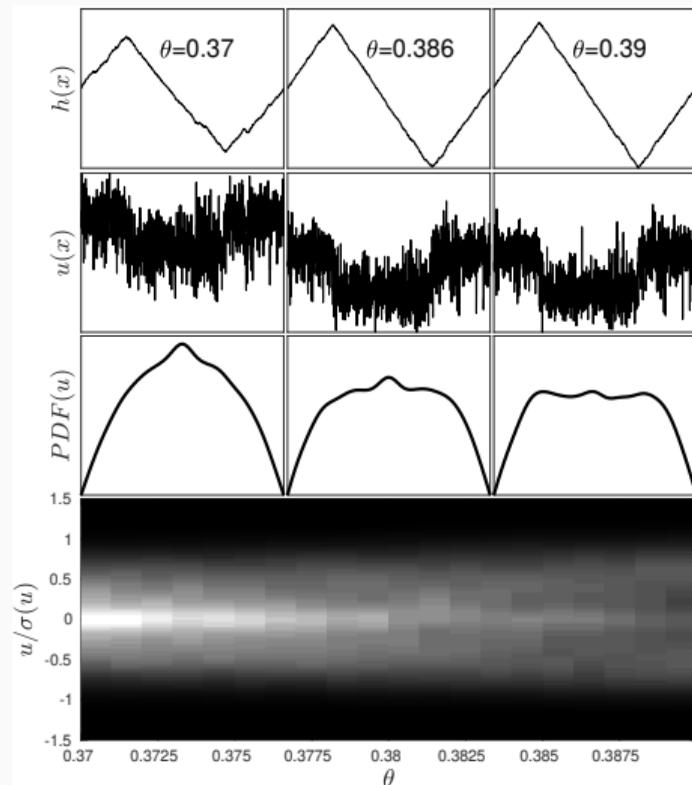
Un análisis más detallado nos muestra



Aparecen en $\theta_{c_2} \approx 3/8$.

Doble campana de Gauss

Un análisis más detallado nos muestra



Aparecen en $\theta_{c_2} \approx 3/8$.

Aunque queda mucha tela que cortar para que esto sea una afirmación *muy firme*

Definición de un parámetro para determinar cuando hay facetas o no

Las preguntas cruciales se puede realizar del siguiente modo.

- ¿Está asociado un valor de $\alpha_s > 1$ al crecimiento facetado? Y no únicamente $\alpha \neq \alpha_s$.

Definición de un parámetro para determinar cuando hay facetas o no

Las preguntas cruciales se puede realizar del siguiente modo.

- ¿Está asociado un valor de $\alpha_s > 1$ al crecimiento facetado? Y no únicamente $\alpha \neq \alpha_s$.
- ¿Existe un parámetro de orden que cuantifique el crecimiento facetado?

Definición de un parámetro para determinar cuando hay facetas o no

Las preguntas cruciales se puede realizar del siguiente modo.

- ¿Está asociado un valor de $\alpha_s > 1$ al crecimiento facetado? Y no únicamente $\alpha \neq \alpha_s$.
- ¿Existe un parámetro de orden que cuantifique el crecimiento facetado?
- De existir, es posible obtener un nuevo exponente crítico.

Definición de un parámetro para determinar cuando hay facetas o no

Las preguntas cruciales se puede realizar del siguiente modo.

- ¿Está asociado un valor de $\alpha_s > 1$ al crecimiento facetado? Y no únicamente $\alpha \neq \alpha_s$.
- ¿Existe un parámetro de orden que cuantifique el crecimiento facetado?
- De existir, es posible obtener un nuevo exponente crítico.

Primer intento

A partir de la variable de campo $\phi(x) = -\arctg[(\partial_x h)^{-1}]$ es posible obtener un parámetro de orden facetado $R = \langle \cos(\phi_{i+1} - \phi_i) \rangle$ que debería ser 0 cuando no hay factas y no-nulo cuando existen.

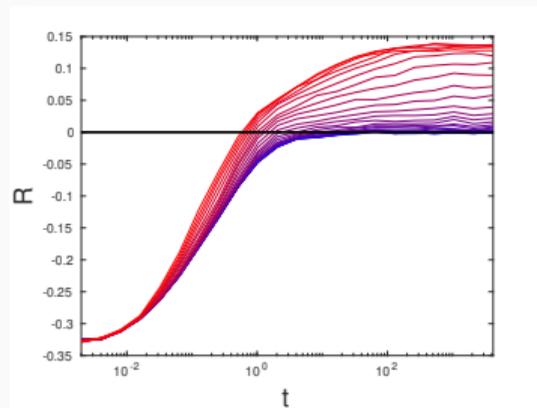


Figura 15: Parámetro R en función del tiempo, varios correladores (discretización Spohn-Sasamoto)

Primer intento

A partir de la variable de campo $\phi(x) = -\arctg[(\partial_x h)^{-1}]$ es posible obtener un parámetro de orden facetado $R = \langle \cos(\phi_{i+1} - \phi_i) \rangle$ que debería ser 0 cuando no hay factas y no-nulo cuando existen.

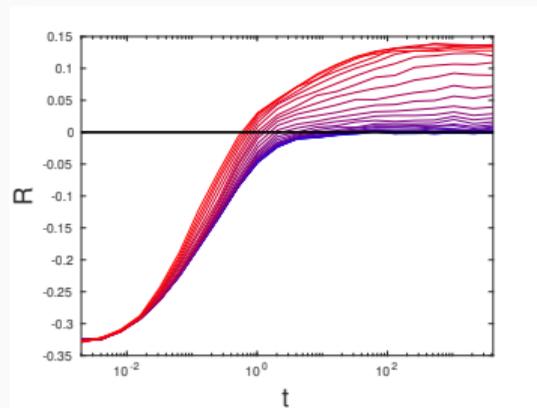


Figura 15: Parámetro R en función del tiempo, varios correladores (discretización Spohn-Sasamoto)

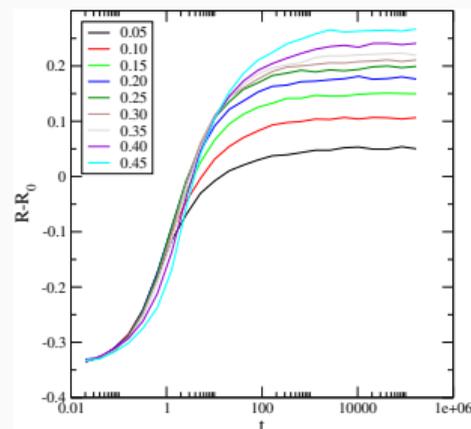


Figura 16: Parámetro R en función del tiempo, varios correladores (discretización Das Sarma)

Primer intento

A partir de la variable de campo $\phi(x) = -\arctg[(\partial_x h)^{-1}]$ es posible obtener un parámetro de orden facetado $R = \langle \cos(\phi_{i+1} - \phi_i) \rangle$ que debería ser 0 cuando no hay factas y no-nulo cuando existen.

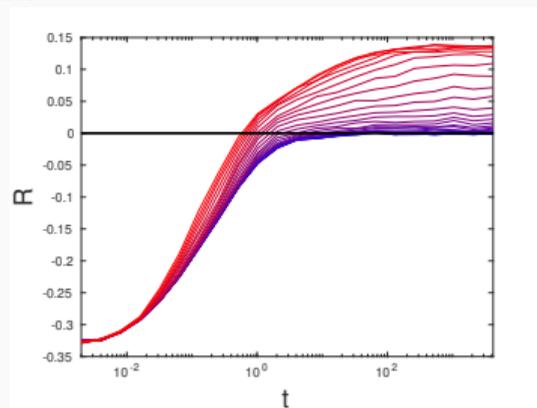


Figura 15: Parámetro R en función del tiempo, varios correladores (discretización Spohn-Sasamoto)

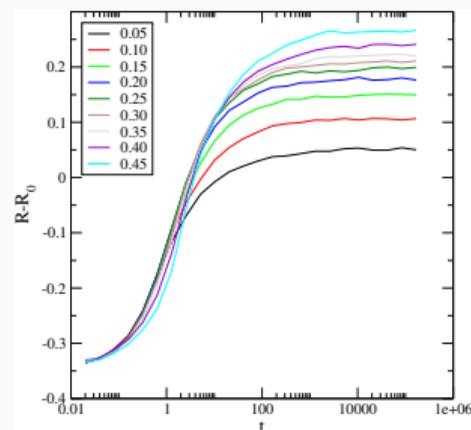


Figura 16: Parámetro R en función del tiempo, varios correladores (discretización Das Sarma)

Depende de la discretización. Coinciden los exponentes críticos pero no este parámetro.

Por otra parte, observando la kurtosis de Burgers, podemos observar

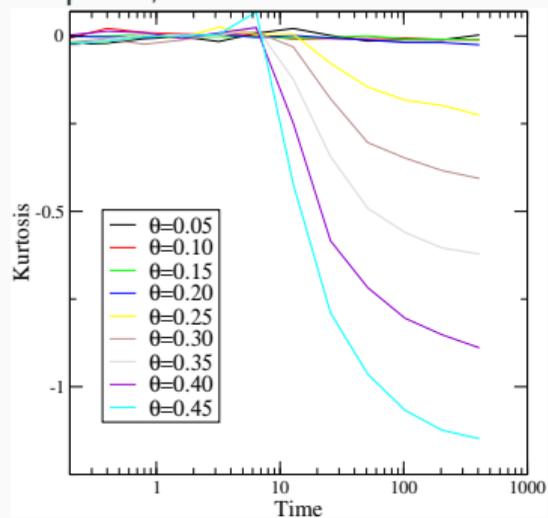
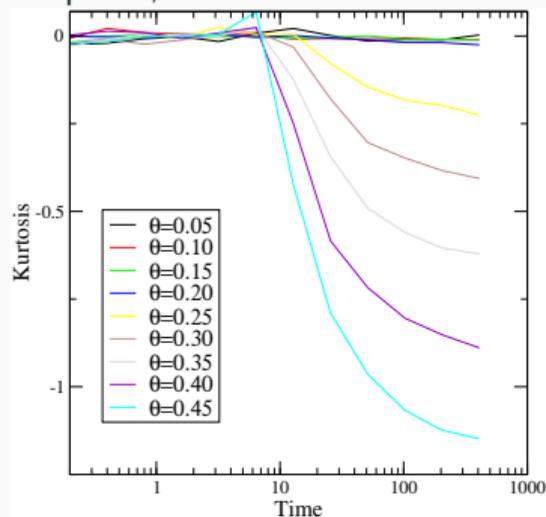


Figura 17: Kurtosis ecuación de Burgers, distintos correladores.

Por otra parte, observando la kurtosis de Burgers, podemos observar



Estos resultados son independientes de la discretización.

Figura 17: Kurtosis ecuación de Burgers, distintos correladores.

Segundo intento

Por otra parte, observando la kurtosis de Burgers, podemos observar

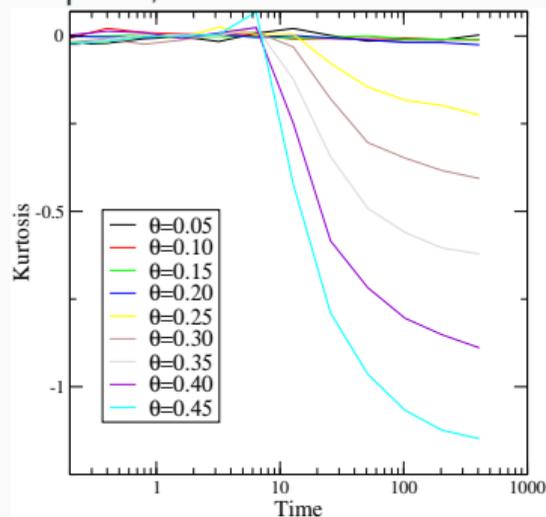


Figura 17: Kurtosis ecuación de Burgers, distintos correladores.

Estos resultados son independientes de la discretización.

Indican claramente que la PDF de Burgers pierde su *gaussianidad* para $\theta > 1/4$

Por otra parte, observando la kurtosis de Burgers, podemos observar

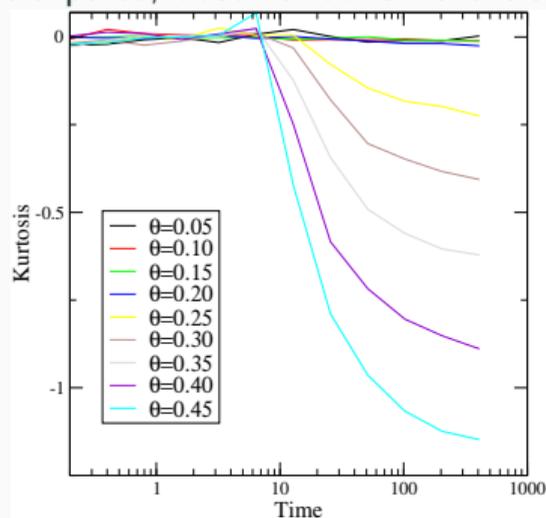


Figura 17: Kurtosis ecuación de Burgers, distintos correladores.

Estos resultados son independientes de la discretización.

Indican claramente que la PDF de Burgers pierde su *gaussianidad* para $\theta > 1/4$

Pero no se observa un cambio de regimen para $\theta = 3/8$.

Por otra parte, observando la kurtosis de Burgers, podemos observar

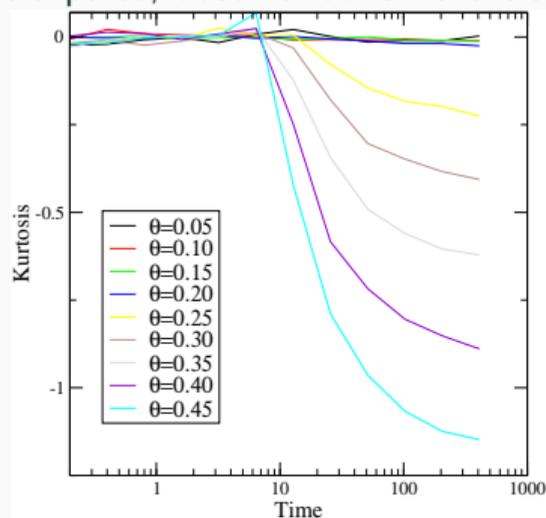


Figura 17: Kurtosis ecuación de Burgers, distintos correladores.

Estos resultados son independientes de la discretización.

Indican claramente que la PDF de Burgers pierde su *gaussianidad* para $\theta > 1/4$

Pero no se observa un cambio de régimen para $\theta = 3/8$. Aunque hace falta más estadística para tener certeza.

Conclusiones

En breves palabras

En breves palabras

- La PDF de las superficies rugosas nos brindan una información adicional al de la densidad espectral

En breves palabras

- La PDF de las superficies rugosas nos brindan una información adicional al de la densidad espectral
- A partir de ellas, es posible observar transiciones de fase

En breves palabras

- La PDF de las superficies rugosas nos brindan una información adicional al de la densidad espectral
- A partir de ellas, es posible observar transiciones de fase
- Sin embargo, para KPZ no se observa un cambio de comportamiento **abrupto**, como sí para Burgers.

En breves palabras

- La PDF de las superficies rugosas nos brindan una información adicional al de la densidad espectral
- A partir de ellas, es posible observar transiciones de fase
- Sin embargo, para KPZ no se observa un cambio de comportamiento **abrupto**, como sí para Burgers.
- Nos falta un parámetro de orden adecuado para observar si la estructura facetada empieza en $\theta > 1/4$ ó $\theta > 3/8$

En breves palabras

- La PDF de las superficies rugosas nos brindan una información adicional al de la densidad espectral
- A partir de ellas, es posible observar transiciones de fase
- Sin embargo, para KPZ no se observa un cambio de comportamiento **abrupto**, como sí para Burgers.
- Nos falta un parámetro de orden adecuado para observar si la estructura facetada empieza en $\theta > 1/4$ ó $\theta > 3/8$
- El comportamiento de la kurtosis de Burgers abre una nueva expectativa.

En breves palabras

- La PDF de las superficies rugosas nos brindan una información adicional al de la densidad espectral
- A partir de ellas, es posible observar transiciones de fase
- Sin embargo, para KPZ no se observa un cambio de comportamiento **abrupto**, como sí para Burgers.
- Nos falta un parámetro de orden adecuado para observar si la estructura facetada empieza en $\theta > 1/4$ ó $\theta > 3/8$
- El comportamiento de la kurtosis de Burgers abre una nueva expectativa.
- Si logramos cuantificar estas transiciones de fase,

En breves palabras

- La PDF de las superficies rugosas nos brindan una información adicional al de la densidad espectral
- A partir de ellas, es posible observar transiciones de fase
- Sin embargo, para KPZ no se observa un cambio de comportamiento **abrupto**, como sí para Burgers.
- Nos falta un parámetro de orden adecuado para observar si la estructura facetada empieza en $\theta > 1/4$ ó $\theta > 3/8$
- El comportamiento de la kurtosis de Burgers abre una nueva expectativa.
- Si logramos cuantificar estas transiciones de fase,
¿ Hay nuevos exponentes críticos?